XXXI OLIMPIADA MATEMÁTICA DE LA REGIÓN DE MURCIA

16 de abril de 2021

Problemas propuestos

Segundo de ESO

PROBLEMA 1

a) El resto de dividir 101 por un número que no conocemos es 11. ¿Cuál puede ser este número (o números)? Si son varios los divisores posibles, los escribes separados por guion.

Respuesta: $15 - 18 - 30 - 45 - 90$

Si al dividir 101 entre k (el número buscado) el resto es 11, k debe ser estrictamente mayor que 11 y se cumple que:

$$101 = k \cdot c + 11$$

siendo c el cociente de la división. Luego, $101 - 11 = k \cdot c$*, y tendremos que ver las posibles factorizaciones de* 90*. Podemos escribir* $90 = 1 \cdot 90$*;* $90 = 2 \cdot 45$*;* $90 = 3 \cdot 30$*;* $90 = 5 \cdot 18$*;* $90 = 6 \cdot 15$*;* $90 = 9 \cdot 10$ *(a partir de aquí se repiten las factorizaciones). Por tanto, k puede valer 90, 45, 30, 18 o 15.*

b) Los divisores de un número pueden ser pares o impares. Por ejemplo, los divisores del número 12 son: 1, 2, 3, 4, 6 y 12; sin contar el 1, tiene cuatro divisores pares y uno impar. Escribe los cuatro primeros números que tengan todos sus divisores pares, sin contar el 1 (separa los números por un guion).

Respuesta: $2 - 4 - 8 - 16$

Si todos los divisores de un número tienen que ser pares, el número es una potencia de 2, ya que el resto de los números primos son impares.

PROBLEMA 2

Seis niños se han reunido para repartirse 4 barras de chocolate del mismo tamaño tal como puedes ver en el dibujo, con onzas de distintos tamaños. Teniendo en cuenta que una onza no se puede dividir, ¿cómo pueden repartirse las onzas de chocolate de modo que todos los niños reciban la misma cantidad de chocolate? Has de decir cuántas onzas de cada tableta recibe cada niño. Escríbelas en la tabla siguiente.

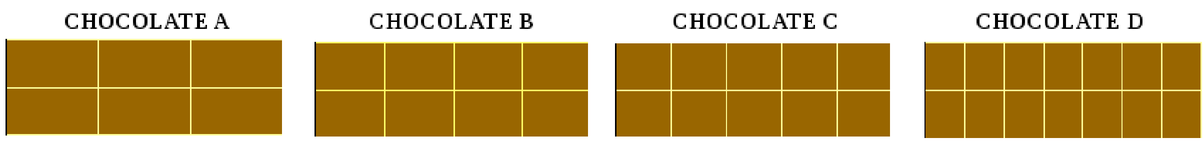

Figure 1: Barras de chocolate

Respuesta:

	onzas de A	onzas de B	onzas de C	onzas de D
Niño 1	1	4		
Niño 2	1	4		
Niño 3	1		5	
Niño 4	1		5	
Niño 5	1			7
Niño 6	1			7

PROBLEMA 3

a) Un atleta corre 10 km en dirección este; entonces gira y corre 10 km en dirección norte; vuelve a girar hacia el oeste y corre 20 km y se para. ¿A qué distancia estará ahora

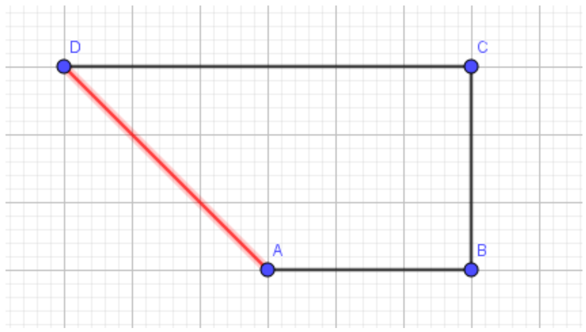

Figure 2: Figura que representa el recorrido del atleta de A a D

del punto de partida? Da la respuesta en km y trabaja con una sola cifra decimal para hacer los cálculos (en lugar de la coma decimal utiliza el punto).

Respuesta: 14 km.

La distancia a la que se encuentra el atleta del punto de partida (A) es la longitud AD, tal como se puede ver en la figura 2, que se puede calcular haciendo uso del teorema de Pitágoras, porque se trata de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos de longitud 10 km, que sería $\sqrt{200}$*, o la diagonal de un cuadrado de lado 10, que es* $10\sqrt{2}$ *km, y asignando a* $\sqrt{2}$ *el valor de 1,4 tenemos que* $10 * 1,4 = 14$ *km.*

b) ¿Cual de las dos parcelas del dibujo que ves a continuación, la gris o la blanca, tiene mayor perímetro? Razona la respuesta.

Respuesta: Tienen el mismo perímetro.

Aunque una de las áreas es claramente mayor que la otra, el área y el perímetro de una figura no crecen (o decrecen) conjuntamente, salvo que las figuras tengan la misma forma, es decir, se trate de figuras semajantes.

c) En la figura 3, n es un número entero. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener n?

– 1

– 7

– 8

– 14

Respuesta: $n = 8$

Como $2n$ tiene que ser mayor que 15, n tiene que ser mayor que 7,5. Luego señalamos

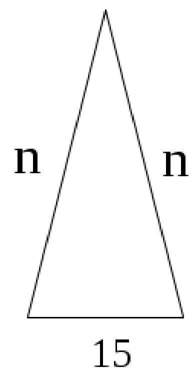

Figure 3: Triángulo

$n = 8$, que es el menor valor que nos permite construir el triángulo.

PROBLEMA 4

a) En una organización hay un 40% de mujeres y un 60% de hombres. Se decide contratar más mujeres para que haya un 50% de personas de cada sexo. ¿Qué fracción representa el número de mujeres de nueva contratación, con respecto al número de mujeres que había inicialmente?

Respuesta: Hay que contratar una cantidad de mujeres igual a la mitad de las mujeres que están trabajando ahora.
Si consideramos que la organización tiene 100 empleados, 40 son mujeres y 60 hombres. Para que la organización tuviera la misma cantidad de trabajadores hombres que mujeres, basta con contratar 20 mujeres más, es decir hay que contratar el 50% de las mujeres que trabajan ahora.

b) Según las estadísticas, hace 2000 años una de cada seis personas era zurda. Según esta afirmación, ¿cuántos de los doce Apóstoles serían zurdos?

- Dos apóstoles, porque es zurdo uno de cada seis.
- Por lo menos ha de haber un apóstol zurdo porque son más de seis.
- La respuesta podría ser cualquier número menor que 13.
- Ninguna de las respuesta anteriores es cierta.

Respuesta: La respuesta podría ser cualquier número menor que 13.

Puede que ninguno de los apóstoles sea zurdo o que lo sean todos.

PROBLEMA 5

Erdös fue un matemático que vivió en el siglo XX y que escribió cerca de 1500 artículos matemáticos, la mayoría de ellos en colaboración con otros matemáticos, lo que se llama coautores; hubo más de 500 matemáticos que escribieron artículos con él. Algunos de sus colaboradores y amigos inventaron el número de Erdös como un homenaje con tintes de humor matemático.

Erdös tiene asignado el número 0.

Cualquier matemático que haya escrito un artículo directamente con Erdös tiene asignado el número de Erdös 1.

Cualquier matemático que haya colaborado con otro matemático que haya colaborado con Erdös tiene el número de Erdös igual a 2.

...

Así, por ejemplo, un matemático que haya colaborado con otros tres matemáticos que tengan números de Erdös 2, 5 y 9, respectivamente, tendrá número de Erdös igual a 3.

a) Dos matemáticos, Ángeles y Basilio, han trabajado juntos y publicado un artículo entre los dos. ¿Pueden tener diferente número de Erdös? Escribe SI o NO.

   Respuesta: SI

   Si Ángeles tiene número de Erdös 8, ¿qué número de Erdös tiene Basilio? ¿Hay una sola posibilidad o más de una? Escribe el número o los números de Erdös posibles para Basilio (si son varios, sepáralos con un guion).

   Respuesta: $7 - 8 - 9$

   Si ambos tenían previamente el mismo número de Erdös, lo conservarán tras publicar un artículo juntos. Si uno de ellos tenía un número menor que el otro, al publicar juntos, el que tenía menor número de Erdös pasa a tener un número más que su compañero.

b) Maleni es matemática y ha publicado 10 artículos. ¿Cuáles de los números del 0 al 10 podrían ser su número de Erdös? Razona brevemente la respuesta.

Respuesta: Cualquier número del 1 al 10.

(El 0 se reeserva para el propio Erdös).

c) ¿Puede ser el número de Erdös de Maleni un número mayor que 10? Explica brevemente la respuesta.

Respuesta: Sí, porque puede ser que ninguno de los coautores de sus artículos tenga número de Erdös menor que 10.

Sexto de primaria

PROBLEMA 1

a) Dada la serie de números $1 - 3 - 7 - 15 - 31$..... Escribe el siguiente número de la serie.

Respuesta: 63

b) Dada la serie $10 - 14 - 18 - 22 - 26 -$ ..., escribe el siguiente número de la serie.

Respuesta: 30

Escribe el número que estaría en la posición 100 de esta serie. Explica cómo lo has hecho.

Respuesta: 406.

Explicación: $10 + 4 \cdot 99 = 406$.

Comentamos otra que podría ser una estrategia al alcance de algunos niños:

Si pensáramos en disponer los números hasta el centésimo, para ver qué pauta siguen,

10	14	18	22	26
30	34	38	42	46
50	54	58	62	66
70				
90				
110				
...				

Si empezamos a escribir números y nos percatamos de que cada cinco números se repiten las terminaciones $0-4-8-2-6$*, vemos que los podemos disponer en filas y que el primer número de cada fila es el primero de la fila anterior más 20. Para llegar al número que ocupa la posición centésima hemos de complear* $100:5=20$ *filas. Los primeros números de esas veinte filas son:* $10-30-50-70-90-110-130-150-170-190-210-230-250-270-290-310-330-350-370-390$*. Y la fila que comienza por 390 es* $390-394-398-402-406$*.*

Se puede simplificar aún más considerando que cada cinco filas se suma 100 al primer número, luego si la quinta empieza por el 90, la décima empezará por 190, la decimoquiinta por 290 y la vigésima por 390. Esta vigésima fila tendrá los números $390-394-398-402-406$ *el último número de la fila número 20, o sea, el centésimo número de la serie, es el 406.*

c) Tres personas han ganado un premio de 1,63 millones de euros, que deben repartirse a partes iguales. ¿Cuántos euros le corresponde a cada una? Da el resultado con una cifra decimal (para poner la coma decimal usa un punto).
Respuesta: 543333.3

PROBLEMA 2

a) El resto de dividir 22 por un número que no conocemos es 4. ¿Cuál puede ser este número (o números)? Si son varios los divisores posibles, escríbelos separados por guion.
Respuesta: $6-9-18$
Usando la relación

$$dividendo = divisor \cdot cociente + resto$$

si al dividendo le restamos el resto, quedará el producto

$$divisor \cdot cociente$$

Como $22-4=18$*, hallamos las posibles factorizaciones de* 18*:* $18=1\cdot 18$*;* $18=2\cdot 9$*;* $18=3\cdot 6$*. Al tener que ser el divisor estrictamente mayor que 4,* k *puede valer* 6, 9 *o* 18.

PROBLEMA 3

a) ¿Cómo es el ángulo que ha recorrido la hoja de la ventana (A) representada en la figura 4, desde que se abre hasta rozar la pared de la habitación?

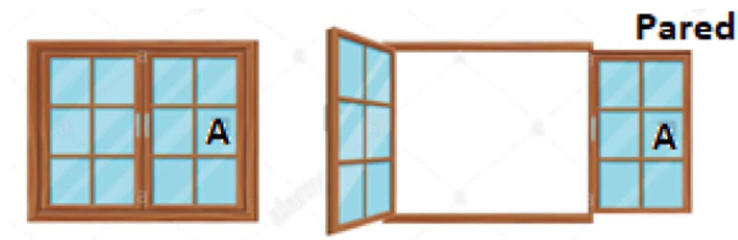

Figure 4: Ventana

Respuesta: Llano

¿Cuántos grados mide dicho ángulo?

Respueta: 180^o

b) Un atleta corre 5 km en dirección este; entonces gira y corre 8 km en dirección norte; vuelve a girar hacia el oeste y corre 5 km y se para. ¿A qué distancia estará ahora del punto de partida? Da la respuesta en km.

Respuesta: 8

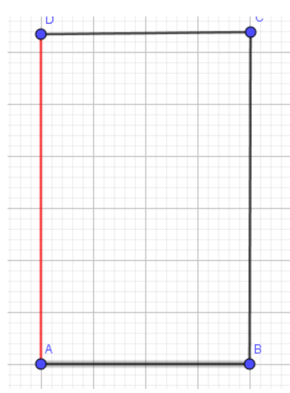

Figure 5: Figura que representa el recorrido del atleta

Como recorre primero 5 km hacia la derecha y, tras recorrer 8 km en una dirección perpendicular, recorre otros 5 hacia la izquierda, en una trayectoria paralela a la primera, se quedará a la misma ´latitud´ y a 8 km al norte, como se observa en la figura 5.

c) ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo que sea, a la vez, rectángulo e isósceles? Explica por qué.

Respuesta: Por ser un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos mide 90^o. Como los tres ángulos de un triángulo miden 180^o y los otros dos ángulos son iguales, por ser el triángulo isósceles (al tener iguales dos lados, ha de tener también iguales los dos ángulos), cada uno de ellos mide 45^o.

PROBLEMA 4

a) Disponemos de 10 piezas iguales que tienen forma de triángulos equiláteros y sabemos que el perímetro de esas piezas es de 15 cm. Escribe el perímetro del mayor triángulo equilátero que puedas formar con ellas.

Respuesta: 45 cm.

Usariamos 9 piezas y las dispondríamos como muestra la figura 6

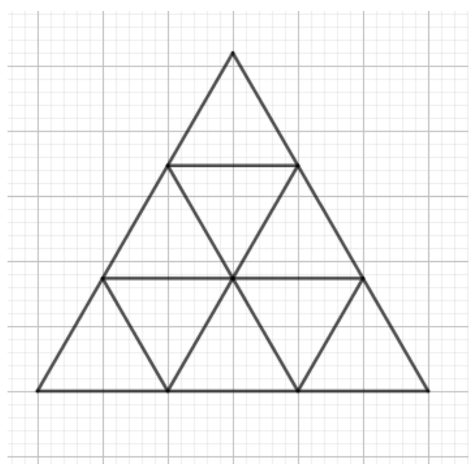

Figure 6: Forma de disponer las piezas.

b) Queremos rellenar con azulejos un hueco que hay en una pared que tiene forma de triángulo equilátero. Sabemos que su perímetro mide 225 cm. En un almacén de materiales de construcción encontramos azulejos en forma de triángulos equiláteros de distintos tamaños. Los hay de 10, 15, 30 y 25 cm de lado. ¿Cuántos cm de lado ha de tener el azulejo que elijamos si queremos comprar el menor número de ellos, de tal forma que recubra totalmente el hueco y que no haya que romper ninguno? (Escribe el número de centímetros del azulejo triangular que convenga comprar).

Respuesta: 25

El lado del hueco mide 75 cm, y el mayor divisor de 75, de entre los números dados, es 25.

¿Cuántos azulejos tenemos que comprar?

Respuesta: 9.

Quedarían dispuestos como en la figura 6.

PROBLEMA 5

a) Escribe el nombre del rombo que tiene sus dos diagonales iguales.

Respuesta: Cuadrado.

Por ser un rombo, las diagonales son perpendiculares y se cortan en el punto medio. Si, además, son iguales, esas tres propiedades juntas definen un cuadrado.

b) Escribe el nombre del paralelogramo que tiene dos lados contiguos iguales (lados contiguos son dos lados que tienen un vértice en común).

Respuesta: Rombo.

Por ser un paralelogramo, tiene iguales los lados opuestos. Al tener iguales también dos lados contiguos, tenemos un cuadrilátero con los cuatro lados iguales y, por definición, se trata de un rombo. (Si el paralelogramo fuese, en particular, un rectángulo, con la condición añadida obtendríamos un cuadrado. Luego, en cualquier caso, resulta un rombo).

c) Según las estadísticas, hace 2000 años una de cada seis personas era zurda. Según esta afirmación, ¿cuántos de los doce Apóstoles serían zurdos?

– Dos apóstoles, porque es zurdo uno de cada seis.

– Por lo menos ha de haber un apóstol zurdo porque son más de seis.

– La respuesta podría ser cualquier número menor que 13.

– Ninguna de las respuesta anteriores es cierta.

Respuesta: Hay que señalar la tercera opción.

Puede que ninguno de los apóstoles sea zurdo o que lo sean todos.